Vorlesung (11), 01.02.2022

N-Körperproblem: Wann ist $I(x_0,\dot{x}_0) \neq \mathbb{R}$ für $(x_0,\dot{x}_0) \in \Omega = Q \times \mathbb{R}^{3N}$,

$$Q = \{(x_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^{3N} : x_i \neq x_j, \text{ für } i \neq j\}$$

und was passiert dann?

N=2: Beim Keplerproblem $\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

wissen wir:

$$I(x_0, \dot{x}_0) \neq \mathbb{R} \iff L(x_0, \dot{x}_0) = x_0 \times \dot{x}_0 = 0. \quad \lrcorner$$

(ii) Im 2-Körperproblem können wir damit den Fall mit $S = 0$, also

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

behandeln.

Dort ist dann $I(x, \dot{x}) \neq \mathbb{R}$ ($x = (x_1, x_2)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$), genau wenn für $x := x_2 - x_1$ gilt: $x \times \dot{x} = 0$. Beachte, dass

$$x \times \dot{x} = (x_2 - x_1) \times (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^2} \cdot x_1 \times \dot{x}_1 ,$$

wo man vermöge (*) $x_2, \dot{x}_2$ durch $x_1, \dot{x}_1$ ausgedrückt hat. Andererseits ist der Gesamtdrehimpuls

$$L = m_1 (x_1 \times \dot{x}_1) + m_2 (x_2 \times \dot{x}_2) = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) \cdot x_1 \times \dot{x}_1$$

also in diesem Fall, wo man schon auf (*) reduziert hat, erneut:

$$I(x,\dot{x}) \neq R \iff L(x,\dot{x}) = 0.$$

Das muss man jetzt noch vermöge der Galiläi-Transformation ins ursprüngliche System zurücktransformieren. Der Ursprung spielt im 2-Körperproblem i.a. keine besondere Rolle, weshalb man dort auch den Drehimpuls bzgl. des Schwerpunktes $L_S : \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$L_S(x,\dot{x}) = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j - S) \times \dot{x}_j$$

(mit $S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j x_j$)

betrachtet. Betrachte, dass dann gilt:

$$L_S = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j (x_j \times \dot{x}_j)}_{=L} - S \times \underbrace{\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{x}_j}_{=P} = L - S \times P.$$

Damit ist auch L_S ein 1. Integral (allerdings abhängig von den Geschwindigkeiten):

$$\dot{L}_S = (L - S \times P)^{\cdot} = \underbrace{\dot{L}}_{=0} - \underbrace{\dot{S}}_{=P} \times P - S \times \underbrace{\dot{P}}_{=0} = 0.$$

Bezeichnen wir nun mit $\tilde{L}$ den Drehimpuls im transformierten System,

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{N} m_j \, q_j \times \dot{q}_j \,,$$

so finden wir

$$y_j = x_j - \overbrace{\dot{s}_0 t - s_0}^{=s}$$

$$\dot{y}_j = \dot{x}_j - \dot{s}_0 \quad :$$

$$\tilde{L}(y, \dot{y}) = \sum_j m_j (y_j \times \dot{y}_j) = \sum_j m_j (x_j - s) \times (\dot{x}_j - \dot{s}_0)$$

$$= \underbrace{\sum_j m_j (x_j - s) \times \dot{x}_j}_{= L_s} - \sum m_j (x_j - s) \times \dot{s}_0 \qquad \ulcorner M := \sum m_j \lrcorner$$

$$= L_s - \left\{ \Big(\underbrace{\sum m_j x_j}_{= M \cdot s} \Big) \times \dot{s}_0 - \underbrace{\sum m_j}_{= M} s \times \dot{s}_0 \right\} = L_s .$$

Es folgt:

Satz. Für das 2-Körperproblem auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{12}$ gilt für alle $(x,\dot{x}) \in \Omega$:

$$I(x,\dot{x}) \neq \mathbb{R} \iff L_S(x,\dot{x}) = 0 .$$

Kommentar. In diesem Fall wissen wir auch, was passiert: Wegen $\lim\limits_{t \to t_\pm} \varphi^t(y) = 0$ im Keplerproblem,

folgt für das transformierte System im

Fall $t_+ < \infty$: $\lim\limits_{t\to t_+} x_1(t) = S(t_+) = \lim\limits_{t\to t_+} x_2(t)$

(„Zusammenstoß")

Fall $t_- > -\infty$: $\lim\limits_{t\to t_-} x_1(t) = S(t_-) = \lim\limits_{t\to t_-} x_2(t)$

(„Explosion") bei

$$S(t_\pm) = S_0 + t_\pm \dot{S}_0 .$$

(b) Der Fall $N \geq 3$:

<u>Erinnerung</u> (im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf): Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$ und $\delta > 0$, $C > 0$ derart, dass

- $\overline{B_\delta(x)} \subseteq \Omega$
- $\|f(y)\| \leq C$, $\forall y \in \overline{B_\delta(x)}$

so ist: $\quad t_+(x) > \delta / C$.

Betrachten wir nun wieder $V : Q \to \mathbb{R}$,

$$V(x) = - \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{m_i m_j}{\| x_i - x_j \|}$$

und das N-Körperproblem auf $\Omega = Q \times \mathbb{R}^{3N}$:

$$m_j \ddot{x}_j = - D_{x_j} V(x) , \quad j = 1, \dots, N .$$

Wir setzen nun:

bei $z = (x, \dot{x}) \in \Omega$ die Funktion $\rho_z : I(z) \to \mathbb{R}_+$

$$\rho_z(t) = \min_{1 \leq i < j \leq N} \| x_j(t) - x_i(t) \|$$

<u>Satz</u> (von Painlevé). Ist nun $t_+(z) < \infty$, so gilt:

$$\lim_{t \to t_+} \rho_z(t) = 0 .$$

<u>Kommentare</u>. (a) Beachte, dass das nicht unbedingt für ein spezielles Paar (i,j) mit $1 \leq i < j \leq N$ bedeutet,

dass $\| x_j(t) - x_i(t) \|$ für $t \to t_+$ gegen Null geht. Paare können sich „auch abwechseln" nah aneinander zu kommen.

(b) Da es nur endlich viele Paare gibt, gibt es allerdings ein Paar (i, j) und eine Folge $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit $(t_\nu) \to t_+$, so dass wenigstens

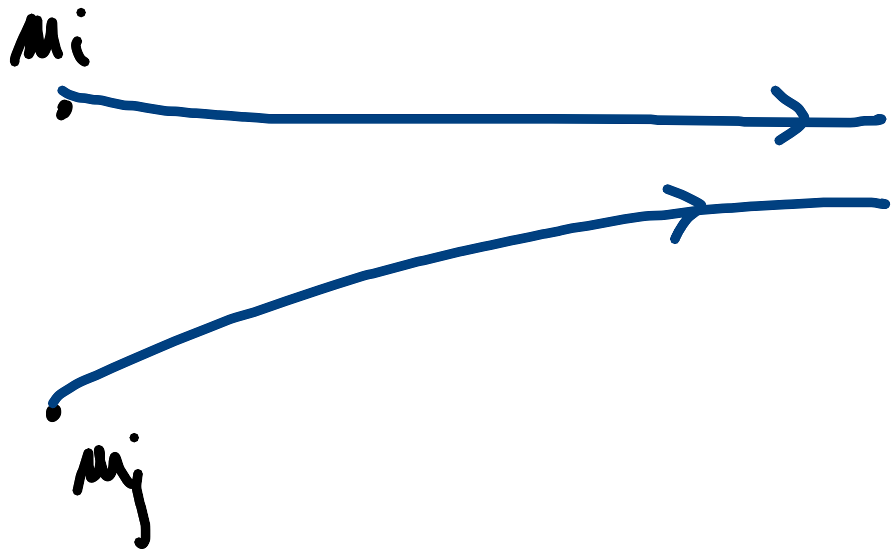
$$\lim_{\nu \to \infty} \| x_j(t_\nu) - x_i(t_\nu) \| = 0$$

(c) Beachte schließlich, dass es deshalb für dieses Paar

immer noch nicht zu einem Zusammenstoß
im Sinne von

$$\lim_{\nu \to \infty} x_i(t_\nu) = p = \lim_{\nu \to \infty} x_j(t_\nu)$$

wie beim 2-Körperproblem kommen muss (für ein $p \in \mathbb{R}^3$).
Es könnte durchaus auch $x_i(t_\nu)$ bzw. $x_j(t_\nu)$ unbeschränkt werden (der Zusammenstoß also „im Unendlichen" stattfinden).



Beweis des Satzes von Painlevé: Sei $z_0 \in \Omega$ fest. Wir nehmen an, dass die Aussage des Satzes nicht gilt.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists (t_\nu)$ mit $(t_\nu) \to t_+$ mit

$$\| x_j(t_\nu) - x_i(t_\nu) \| \geq \varepsilon, \quad \forall 1 \leq i < j \leq N, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$$

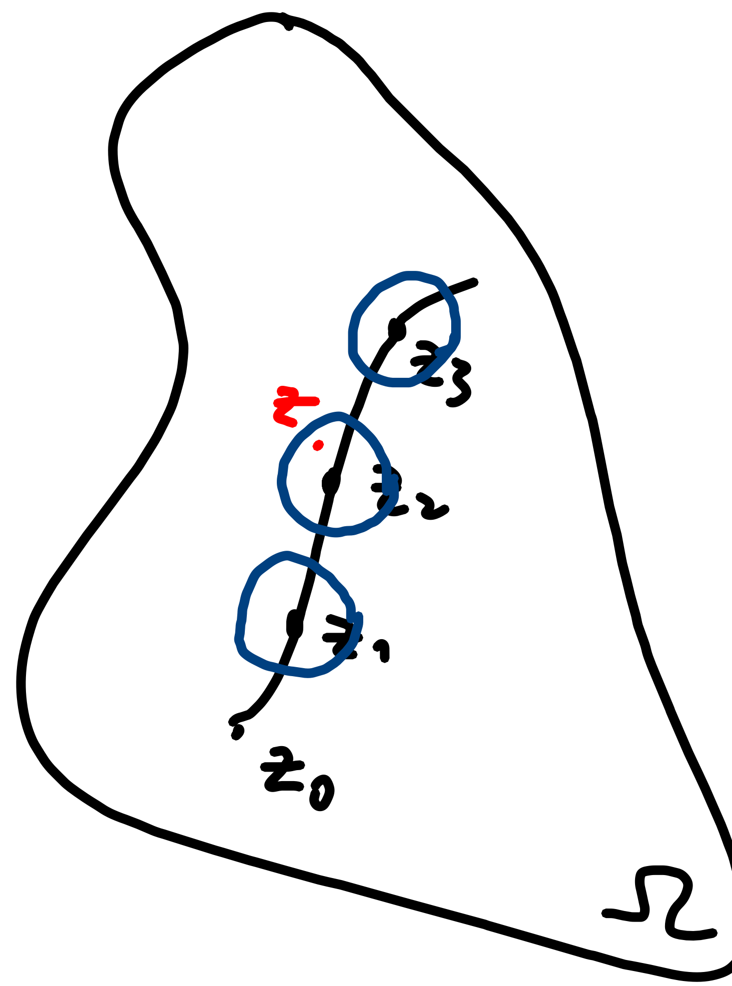
Behauptung: $t_+ = \infty$.

Schritt 1. Sei nun $z_\nu := (x(t_\nu), \dot{x}(t_\nu)) \in \Omega$ und

$$B_\nu := \overline{B_{\varepsilon/4}(z_\nu)}$$

Für alle $z = (x, \dot{x}) \in B_\nu$ und $1 \le i < j \le N$ gilt:

$$\|x_j - x_i\| = \|x_j - x_j(t_\nu) + x_j(t_\nu) - x_i(t_\nu) + x_i(t_\nu) - x_i\|$$



$$= \| x_j(t_\nu) - x_i(t_\nu) - \Big((x_j(t_\nu) - x_j) - (x_i(t_\nu) - x_i) \Big) \|$$

$$\geq \| x_j(t_\nu) - x_i(t_\nu) \| - \Delta_{ij} ,$$

$$\geq \varepsilon - \Delta_{ij}$$

wobei

$$\Delta_{ij} := \| (x_j(t_\nu) - x_j) - (x_i(t_\nu) - x_i) \|$$

$$\leq \| z_\nu - z \| + \| z_\nu - z \| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} ,$$

also

$$(*) \qquad \| x_j - x_i \| \geq \frac{\varepsilon}{2} , \quad \forall z \in B_\nu , \; 1 \leq i < j \leq N ,$$

insbesondere also:

$$B_\nu \subseteq \Omega .$$

Schritt 2. Nun beginnen wir für unser System

$$\dot{z} = f(z)$$

mit $f : \Omega \to \mathbb{R}^{6N}$,

$$f(x, \dot{x}) = \left(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, -\frac{1}{m_1} D_{x_1} V(x), \dots, -\frac{1}{m_N} D_{x_N} V(x) \right)$$

das Vektorfeld auf B_ν normweise abzuschätzen. Weil

$$H = \frac{1}{2} \sum m_j \|\dot{x}_j\|^2 + V(x)$$

ein 1. Integral ist, haben wir zunächst für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

$$\|\dot{x}_i(t_\nu)\|^2 \leq \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{N} m_j \|\dot{x}_j\|^2(t_\nu) = \frac{1}{m_i}\left(2H_0 - V(x(t_\nu))\right),$$

wo $H_0 = H(z_0)$ die Energie der Anf.-formation $z_0 = (x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$ ist. Wegen (*) ist nun

$$-V(x(t_\nu)) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\underbrace{\|x_i - x_j\|(t_\nu)}_{\geq \varepsilon}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i<j} m_i m_j$$

Mit

$$c_1 := \frac{2H_0}{\min\limits_{i=1}^{N}(m_i)}, \quad c_2 := \frac{\sum m_i m_j}{\min\limits_i (m_i)}$$

folgt:

$$\|\dot{x}_i(t_\nu)\|^2 \leq c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon},$$

unabhängig von ν!

3. Schritt. Für die hinteren Komponenten von f benutzen wir erneut $(*)$: $\forall\, i = 1, \dots, N$, $\forall\, z = (x, \dot{x}) \in B_\nu$:

$$\| D_{x_j} V(x) \| = \Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{\| x_j - x_i \|^3} \Big\|$$

$$\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} m_i m_j \frac{1}{\underbrace{\| x_j - x_i \|}_{\geq \frac{\varepsilon}{2}}^{2}} \leq c_3 \cdot \frac{\varepsilon^2}{4}$$

mit $c_3 := \sum_{i<j} m_i m_j$

$$\Rightarrow \forall \overset{(x,\dot{x})}{\overset{\shortparallel}{z}} \in B_\nu :$$

$$\|f(z)\|^2 = \|\dot{x}\|^2 + \sum_j \frac{1}{m_j^2} \|D_{x_j} V(x)\|^2 \le C$$

mit einem $C > 0$, welches von N, den Massen m_j $(j = 1, \dots, N)$ und $\varepsilon > 0$ abhängt, nicht aber von ν! Nach der Erinnerung gilt daher:

$$t_+ > t_\nu + \frac{\varepsilon}{4C} \quad , \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Da aber $(t_\nu) \to t_+$, folgt daraus: $t_+ = \infty$.

$\blacksquare$

(3.9) Das Lemma von Euler

Vorbemerkungen. Die einfachsten Bahnen eines dynamischen Systems (φ^t) auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sind ihre *Gleichgewichtslagen*, d.h.: $x \in \Omega$ mit $I(x) = \mathbb{R}$ und $\varphi^t(x) = x$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ das zugehörige Vektorfeld, so sind dies gerade die Nullstellen von f, $f(x) = 0$.

Frage. Hat das N-Körperproblem Gleichgewichtslagen?

Wegen

$$f(x,\dot{x}) = (\dot{x}, \dots, -\frac{1}{m_j} D_{x_j} V(x), \dots),$$

wäre für eine solche $z_0 = (x_0, \dot{x}_0)$ sicher $\dot{x}_0 = 0$ (und x_0 ein krit. Punkt von V). Eine Anf.-konf. von N Himmelskörpern, wo es zu keiner Bewegung kommt, wird es wohl kaum geben. Aber wie beweisen?

Aufgabe. V hat keine kritischen Punkte.